EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Corrigé 6**

Exercice 1. Composition et produits de revêtements. Soient $q : F \to E$, $p : E \to B$, $p' : E' \to B'$ des revêtements.

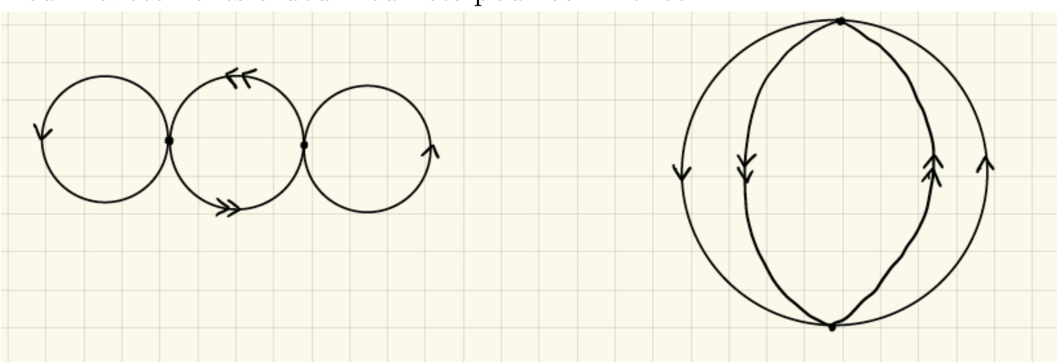
1. Supposons que p est à fibres finies. Montrer que $p \circ q$ est un revêtement.
2. Montrer que $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement.
3. (optionnel) Peut-on enlever l'hypothèse de finitude pour la question 1 ?
4. (optionnel) Est-ce qu'un produit infini de revêtements est toujours un revêtement ?

Solution 1.

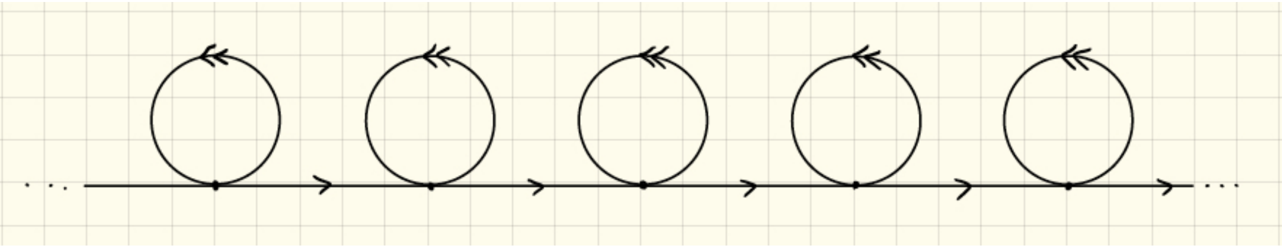
1. Soit $b \in B$, écrivons $p^{-1}(b) = \{e_1, \dots, e_k\}$. Soit $U_1, \dots, U_k \subseteq E$ des ouverts adaptés pour q et tels que $e_i \in U_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Soit $V \subseteq B$ un voisinage de b tel que $p|_{p^{-1}(V)}$ est trivial (i.e. V adapté). En particulier, chaque élément de V a exactement k préimages dans E car c'est le cas de $b \in B$. Comme $\bigcap_{i=1}^k p(U_i)$ est un voisinage ouvert de b, on peut réduire V pour supposer $V \subseteq \bigcap_{i=1}^k p(U_i)$. Comme tout point de V a alors k préimages dans $\bigcup U_i$, on en déduit que
$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_i U_i'$$
où $U_i' = p^{-1}(V) \cap U_i$. On a ainsi que V est un ouvert trivialisant le revêtement $q \circ p$.
2. Soient $b \in B$, $b' \in B'$ et U, U' des ouverts trivialisants autour de b et b' respectivement avec des homéomorphismes $p^{-1}(U) \simeq U \times F$ et $p'^{-1}(U') \simeq U' \times F'$ où F et F' sont des espaces topologiques discrets.
On a alors
$$(p \times p')^{-1}(U \times U') \simeq U \times U' \times F \times F',$$
ce qui montre que c'est bien un revêtement.
3. Non, on peut construire un contre-exemple avec les boucles d'oreilles hawaiennes.
4. Non, on peut considérer p_∞, un produit infini de copies du revêtement $\mathbb{R} \to S^1$ et remarquer que par définition de la topologie produit, un ouvert en bas est produit d'ouverts de S^1 et qui sont égaux à S^1, sauf un nombre fini, donc ne permet pas de trivialiser localement p_∞. Ainsi, p_∞ n'est pas un revêtement.

Exercice 2. Collier de perles. Comprendre, expliquer et démontrer que les espaces suivants forment des revêments d'un bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$.

1. Deux revêtements à deux feuillets pour commencer :



2. Un revêtement à un nombre infini de feuillets aussi appelé le collier de perles :



3. Dessiner un revêtement contractile du collier de perle.

Solution 2. On utilise ici la propriété suivante : un quotient par une action de groupe libre et totalement discontinue (une composante connexe est un signleton) est un revêtement.

1. Notons les espaces de gauche et de droite dans l'image par X et Y, respectivement. Appelons les cercles avec une seule flèche a, et désignons par b les demi-cercles supérieur et inférieur du cercle central (en tenant compte de l'orientation). Notons C_2 le groupe cyclique d'ordre 2. Nous définissons une action de C_2 sur X en envoyant la copie gauche de a sur sa copie droite tout en préservant l'orientation, et en envoyant le demi-cercle supérieur b sur le demi-cercle inférieur b en conservant l'orientation. Par cette construction, nous voyons que l'action de C_2 est totalement discontinue, donc l'application

$$p : X \to X/C_2$$

est un revêtement et l'espace quotient est bien $S^1 \vee S^1$.

De manière similaire, nous définissons une action de C_2 sur Y en envoyant l'arc simple gauche et l'arc à double flèches gauche sur leurs homologues à droite tout en préservant l'orientation. Cette action est également totalement discontinue, ce qui nous permet d'obtenir un revêtement

$$q : Y \to Y/G,$$

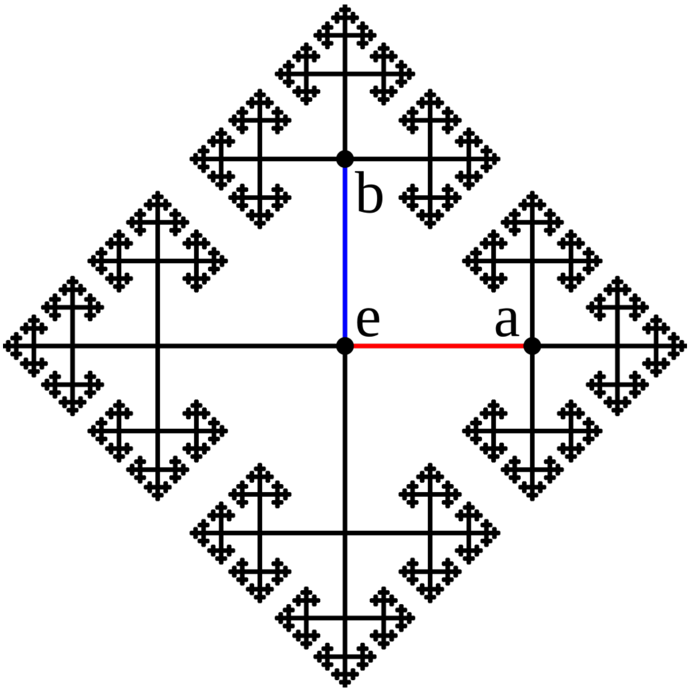
où l'espace quotient Y/G est identifié à $S^1 \vee S^1$.

2. Soit A l'espace décrit ci-dessus. Notons les cercles par a et les segments reliant deux cercles par b. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur A par translation : cette action envoie chaque cercle sur le cercle à sa droite et chaque segment sur le segment correspondant à sa droite. Cette action est totalement discontinue. L'orbite de cette action, $A/\mathbb{Z}$, est homéomorphe à $S^1 \vee S^1$, ce qui fait de

$$p : A \to S^1 \vee S^1$$

un revêtement.

3. Voici un dessin d'un tel revêtement, appelé graphe de Cayley, que l'on note X dans la suite.



Montrons qu'il est contractile. Supposons que chaque arête de X ait une longueur égale à 1, et observons qu'il existe un unique chemin le plus court reliant chaque point $x \in X$ au centre e. Ainsi, nous obtenons une fonction de distance bien définie $d : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Étant donné un point $x \in X$, nous notons P_x l'unique chemin le plus court de e à x. Observons que la restriction de d à P_x définit un homéomorphisme d_x de P_x sur $[0, d(x)]$.

Remarquons que $[0, d(x)]$ est contractile via l'homotopie de contraction $F : [0, d(x)] \times I \to [0, d(x)]$ définie par

$$F(y, t) = d(y)(1 - t).$$

Nous pouvons maintenant étendre F à tout X en définissant

$$\tilde{F} : X \times I \to X, \quad \tilde{F}(x, t) = d_x^{-1}(d(x)(1 - t)).$$

Ainsi, le graphe de Cayley X est contractile.

Exercice 3. Somme connexe de la bouteille de Klein et du plan projectif. Le but est de construire la somme connexe $K \# \mathbb{R}P^2$. Des dessins clairs et des explications concernant les opérations de découpage et d'identification sont demandées mais une paramétrisation explicite n'est pas nécessaire. La bouteille de Klein K est le quotient du carré en identifiant les côtés opposés horizontaux a_1 et a_2 par $(s, 0) \sim (s, 1)$ et les verticaux b_1 et b_2 par $(1, t) \sim (0, 1 - t)$. Pour $\mathbb{R}P^2$ on choisit le modèle D^2 quotienté par la relation antipodale sur le bord.

1. Construire la somme connexe $K \# \mathbb{R}P^2$ en montrant que c'est un espace homéomorphe au quotient d'un hexagone
2. Montrer que $K \# \mathbb{R}P^2$ est un espace homéomorphe à un wedge de trois cercles auquel on attache une unique 2-cellule.

Solution 3.

1. On dit qu'une relation d'équivalence est définie par une concaténation de chemin $a \star b$ si on identifie $a(t) \sim b(t)$ pour tout $t \in I$. Ainsi, dans le quotient, l'image de $a \star b$ est homotope au lacet constant.

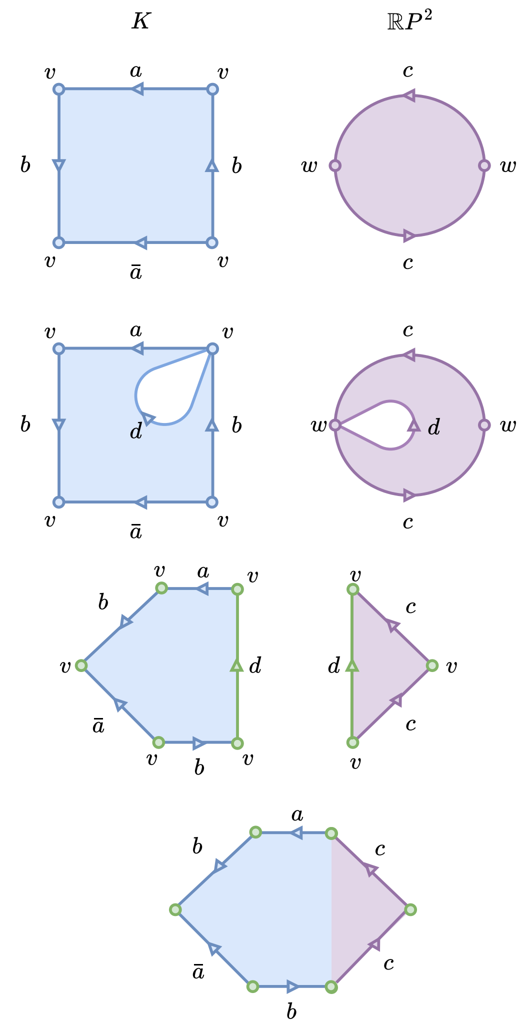


FIGURE 1 – Construction de la somme connexe de K et $\mathbb{R}P^2$

On appelle c_1 l'hémicycle supérieur de D^2 parcouru dans le sens trigonoméetrique et c_2 l'hémicycle inférieur parcouru dans le sens antitrigonoméetrique. On identifie $\mathbb{R}P^2$ au quotient de D^2 par la relation d'équivalence déterminée par le chemin $c_1 \star c_2$. Par définition de la somme connexe de deux surfaces on construit $K\#\mathbb{R}P^2$ en faisant des choix : d'abord un point $t \in K$, un voisinage ouvert U de t homéomorphe à un disque et dont le bord est homéomorphe à un cercle paramétrisé par un lacet indiqué par d_1 sur le dessin ci-dessous effectué dans le carré $I \times I$ dont le tore est un quotient. Ensuite, de manière analogue dans le plan projectif pour un point r, un voisinage V dont le bord est paramétrisé par le lacet d_2. Le dessin est fait dans le disque dont $\mathbb{R}P^2$ est un quotient.

On appelle a_1, b_2, a_2, b_2 les segments du bord du carré de telle sorte que $a_1 \star b_1 \star a_2 \star b_2$ soient un lacet parcourant le bord du carré. Appelons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence donnée par le chemin $a_1 \star b_1 \star a_2^{-1} \star b_2$ et $\mathcal{S}$ la relation antipodale sur le bord de D^2. Alors la somme connexe $K\#\mathbb{R}P^2$ est la réunion disjointe de $(I \times I) \setminus U$ et $D^2 \setminus V$ qu'on quotiente par la relation d'équivalence $\mathcal{T}$ identifiant les lacets d_1 et d_2, puis continuant avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. Pour effectuer cette construction on identifie les deux polygones troués ci-dessus avec des quotients. Le carré troué est le quotient d'un pentagone dont on identifie deux sommets successifs A et B, le disque troué est le quotient d'un triangle dont on identifie deux sommets A' et B'.

En résumé l'espace cherché est le quotient de la réunion disjointe d'un pentagone et d'un triangle. La relation d'qéuivalence est décrite en trois temps : on identifie les points A et B, aussi A' et B' ; puis on identifie les côtés a_1 et a_2, b_1 et b_2, et c_1 et c_2 dans le sens des flèches indiqués sur le dessin ; enfin on identifie les bords des voisinages U et V.

Or, l'ordre des identifications n'a pas d'importance. On peut aussi choisir de commencer par la fin, donc $\mathcal{T}$ et identifier d_1 avec d_2. On obtient alors un hexagone dont les côtés sont décorés par des flèches et des lettres pour faciliter la compréhension des quotients.

On identifie ensuite les paires de côtés et on observe que cette deuxième opération identifie déjà A et B, car ils ont été identifié respectivement avec A' et B' à la première étape. Autrement dit $K\#\mathbb{R}P^2$ est un espace quotient d'un hexagone par la relation d'équivalence déterminée par le chemin $a_1 \star b_1 \star a_2^{-1} \star b_2 \star c_1 \star c_2$.

2. On considère le diagramme commutatif suivant où H désigne un hexagone régulier et ∂H son bord :

$$\begin{tikzcd} \partial H \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & H \arrow[d] \\ \partial H/\mathcal{A} \arrow[r] & H/\mathcal{B} \end{tikzcd}$$

La relation $\mathcal{B}$ est la relation décrite en 2, et $\mathcal{A}$ est la relation restreinte au bord de H. Il s'agit donc de la relation qui identifie les six côtés deux à deux selon l'ordre et le sens indiqué par le mot $a_1 \star b_1 \star a_2^{-1} \star b_2 \star c_1 \star c_2$. Comme tous les sommets sont identifiés, l'espace $\partial H/\mathcal{A}$ est un wedge de trois cercles $S^1_a \vee S^1_b \vee S^1_c$. L'indice permet de se souvenir de quels segments chaque cercle est issu, et on appelle le lacet faisant le tour du cercle par la même lettre. Ainsi $a\colon S^1 \to S^1_a \vee S^1_b \vee S^1_c$ désigne l'homéomorphisme $S^1 \to S^1_a$ suivi de l'inclusion canonique dans le wedge. Le carré ci-dessus nous permet d'identifier $H/\mathcal{B}$ à homéomorphisme près avec le pushout de $\partial H/\mathcal{A} \leftarrow \partial H \hookrightarrow H$, puisque la propriété universelle du pushout donne une bijection continue entre deux espaces compacts et séparés.

Mais l'espace et sous-espace H et ∂H sont homéomorphes à D^2 et $S^1 = \partial D^2$, si bien que $K\#\mathbb{R}P^2$ est un espace homéomorphe au pushout du diagramme

$$D^2 \hookleftarrow S^1 \xrightarrow{f'} S^1_a \vee S^1_b \vee S^1_c$$

et il reste à identifier f' qui correspond à f ci-dessus :

$$f' \colon S^1 \approx \partial H \xrightarrow{f} \partial H/\mathcal{A} \approx S^1_a \vee S^1_b \vee S^1_c$$

Le premier homéomorphisme identifie le lacet $t \to e^{i2\pi t}$ avec la concaténation $a_1 \star b_1 \star a_2^{-1} \star b_2 \star c_1 \star c_2$ par la partie 1. En passant au quotient celui-ci devient précisément $a \star b \star a^{-1} \star b \star c \star c$, ce qui nous permet de conclure.

Remarque : La composition $i \circ f'$ où i est l'inclusion du wedge de trois cercles dans la somme connexe factorise par D^2 par la partie 3. Comme le disque est constractile, le lacet $a \star b \star a_2^{-1} \star b \star c \star c$ est homotopiquement trivial dans le disque, par conséquent aussi dans $K \# \mathbb{R}P^2$.

Exercice 4. Homotopies libres et conjugaison. Soit X un espace topologique connexe par arcs, et soit x un point de X. On appelle lacet libre dans X une application continue $f : S^1 \to X$. Deux lacets libres f_0 et f_1 sont dits librement homotopes s'ils sont homotopes (par une homotopie non nécessairement pointée).

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$.

Solution 4. On note $L(X)$ l'ensemble des classes d'homotopie libre de X. Comme deux lacets homotopes sont bien entendu également librement homotopes, il y a une application bien définie

$$\pi_1(X, x) \to L(X)$$

envoyant la classe d'un lacet sur sa classe d'homotopie libre. Elle est surjective : soit γ un lacet de base un point $y \in X$, et soit $\ell : [0,1] \to X$ un chemin de x vers y. Alors γ est librement homotope au chemin $\ell\gamma\ell^{-1}$ par l'homotopie :

$$H(t,s) = \begin{cases} \ell(s + 4t(1-s)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \gamma(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \ell(s + (1-s)(2-2t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nous devons montrer que cette application est constante sur les classes de conjugaison dans $\pi_1(X, x)$. Pour cela, on peut encore utiliser l'homotopie ci-dessus. L'application ci-dessus passe donc au quotient pour donner une application bien définie des classes de conjugaison dans $\pi_1(X, x)$ vers $L(X)$. Il suffit maintenant de montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que deux lacets basés en x et librement homotopes sont conjugués dans $\pi_1(X, x)$.
Soient f_0 et f_1 deux lacets basés en x et librement homotopes, et soit $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie libre telle que $H(\cdot, 0) = f_0$ et $H(\cdot, 1) = f_1$. On remarque que le chemin $\gamma : t \mapsto H(0, t)$ est un lacet basé en x. Nous allons construire une homotopie de lacets entre f_0 et $\gamma f_1 \gamma^{-1}$. À temps t, cette homotopie parcourt le lacet γ de 0 à t, puis parcourt le lacet $H(\cdot, t)$, puis reparcourt γ de t à 0. Une telle homotopie est donnée par exemple par :

$$H(t,s) = \begin{cases} H(0, 4st) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H(4t-1, s) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(0, s(2-2t)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Remarque. Une autre manière de voir qu'un lacet et son conjugué sont librement homotopes : soient α, β deux lacets. On rappelle que par définition $\alpha\beta$ est le lacet γ qui parcourt tout α pendant une moitié du temps ($s \in [0, 1/2]$), et β pendant l'autre moitié du temps ($s \in [1/2, 1]$). On construit une homotopie libre entre $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ de la manière suivante : à l'instant t, l'application $H(\cdot, t)$ commence à parcourir α de t à 1, ensuite parcourt β, puis reparcourt α de 0 à t.

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha\beta(t + \frac{s}{2}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha\beta(t - 1 + \frac{s}{2}) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi, β est librement homotope à $\alpha^{-1}\beta\alpha$.

Exercice 5. Théorème de Brouwer. On appelle rétraction une application (pointée) $r : X \to X$ telle que $r(X) = A$ et $r_{|A} = id_A$. Notons i l'inclusion (pointée) de A dans X. Si a est le point base de A on choisit $x = i(a)$ comme point base pour X.

1. Montrer que si $r : X \to A$ est une rétraction, on a une injection $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, x)$.
2. Montrer que toute application $h : D^2 \to D^2$ admet un point fixe, i.e. $x \in D^2$ tel que $h(x) = x$.

   Indication : Raisonner par l'absurde. Chercher à utiliser la question 1 avec $A = S^1$ et $X = D^2$.

Solution 5.

1. Comme $r \circ i = id_A$, on a que $(id_A)_* = (r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ est un isomorphisme, on obtient que i_* est injective.
2. Supposons par l'absurde que $h(x) \neq x$ pour tout $x \in D^2$. On peut alors définir une application $r : D^2 \to S^1$ telle que $r(x)$ est le point du bord de D^2 qui intersecte la demi-droite partant de $h(x)$ et passant par x (faire un dessin). Il est clair que r est continue puisque h l'est. De plus, si $x \in S^1$, on a $r(x) = x$. Donc r est une rétraction de D^2 sur S^1, mais par la question 1 et comme il n'y a pas d'injection $\pi_1(S^1) \to \pi_1(D^2)$, c'est absurde.